Motivazioni comportamentali e insiemi attrattivi nei modelli stocastici per il trasporto collettivo

Pietro Paiano *Stefano Pallottino*

Università di Pisa, Dipartimento di Informatica - 40, Corso Italia - 56125 Pisa

Lavoro svolto nell'ambito del Progetto Finalizzato Trasporti 2 del Consiglio Nazionale delle Ricerche (n. 97.000256.PF74) e del Gruppo Nazionale di Informatica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

1. Introduzione

In questo lavoro vengono approfonditi alcuni aspetti modellistici affrontati in [12, 13] per l'assegnazione stocastica di tipo logit dei passeggeri su una rete di trasporto collettivo [2, 5, 14].

L'importanza del modello logit nella rassegna dei modelli di assegnazione per la pianificazione dei trasporti ha una duplice motivazione. La prima di ordine storico giacché il modello logit proposto da Dial [6] è una valida alternativa alle assegnazioni "*tutto o niente*", pur non richiedendo l'enumerazione, fino ad allora considerata inevitabile, di tutti i cammini nel grafo; la seconda di ordine computazionale, giacché a fronte di una complessità algoritmica polinomiale si ottengono assegnazioni attendibili su reti di trasporto debolmente congestionate.

L'applicazione di un modello di tipo logit al caso del trasporto collettivo è stato possibile solo attraverso l'introduzione degli ipergrafi [3, 4, 7, 8, 9, 11]; inoltre una diretta applicazione del metodo descritto in [6] ad un ipergrafo di trasporto non conserva la fondamentale proprietà di evitare l'enumerazione di tutti i possibili ipercammini.

Nguyen, Pallottino e Gendreau in [13] hanno proposto un modello logit di tipo "gerarchico" che evita l'enumerazione delle alternative anche su ipergrafi di trasporto. Come vedremo, il tentativo di generalizzare i concetti proposti da Dial lascia un certo margine di discrezione. Concetti e ipotesi, che nel trasporto privato si prestano ad una interpretazione univoca e ad un unico algoritmo di assegnazione, nel caso del trasporto collettivo possono essere interpretati e giustificati in modi diversi; ne consegue che si possono studiare diversi modelli e mettere a punto i relativi algoritmi, ottenendo da essi assegnazioni diverse, più o meno valide a seconda del criterio di valutazione scelto.

Obiettivo del presente lavoro è fornire alcuni "strumenti" per valutare la "bontà" dei possibili modelli. I criteri di valutazione sono vari e lasciamo al lettore la valutazione di quale sia il più attendibile. Ci limitiamo a rimarcare il fatto che un'assegnazione ottenuta da un algoritmo per ipergrafi può essere valutata sulla base dei flussi assegnati agli archi di salita di un nodo fermata e, per l'ipotesi comportamentale su cui si fonda una tale assegnazione, sulla base del flusso assegnato alle singole linee di trasporto.

Nei capitoli 2 e 3 richiameremo le caratteristiche principali del modello proposto in [6] e della generalizzazione proposta in [12, 13], con minimi richiami alla teoria degli ipergrafi; nel capitolo 4 esporremo due possibili varianti del modello per ipergrafi e ne presenteremo le implicazioni algoritmiche; nel capitolo 5 forniremo alcuni risultati sperimentali per valutare le caratteristiche dei due modelli proposti.

2. Il modello logit di Dial

La rete di un sistema di trasporto privato viene descritta attraverso un grafo pesato $G = (N, A)$ in cui N è un insieme di nodi che rappresentano luoghi geografici, A è un insieme di archi; il generico arco $e = (i,j)$ rappresenta la possibilità per il viaggiatore di spostarsi da i a j con un costo $c(i,j)$ [1]. Fanno parte del grafo di trasporto i nodi centroide considerati origine e destinazione della *domanda di trasporto*.

Considerata una coppia di nodi centroide *origine-destinazione* (*od* nel seguito), l'insieme $P(o,d)$ dei cammini che connettono sul grafo di trasporto il nodo o al nodo d corrisponde all'insieme dei percorsi alternativi a disposizione dei viaggiatori; nel seguito parleremo indifferentemente di alternative di percorso e cammini sul grafo di trasporto; a ciascun cammino $p \in P(o,d)$ possiamo associare un costo V_p *additivo* come somma dei pesi degli archi che lo compongono:

$$V_p = \sum_{e=(i,j)\in p} c(i,j) = \sum_{e=(i,j)\in A} c(i,j)\delta_{ij}^p, \qquad \forall\, p \in P(o,d); \tag{2.1}$$

dove

$$\delta_{ij}^p = \begin{cases} 1, & \text{se } e = (i,j) \in p; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il costo V_p rappresenta una misura della *disutilità* percepita dal viaggiatore diretto da o verso d che sceglie di compiere il proprio viaggio lungo il cammino p; V_p viene indicato anche come *costo generalizzato* dell'alternativa di percorso rappresentata da p, dove il termine "generalizzato" è usato per indicare che il costo di una alternativa di percorso non è legato al solo tempo di viaggio ma ad una varietà di fattori, spesso difficilmente quantificabili.

Ovviamente, qualunque assegnazione della domanda, fissata una coppia *od*, sarà legata ai valori V_p, $\forall\, p \in P(o,d)$. Una assegnazione estremale è quella che consiste nell'assegnare tutta la domanda di trasporto t_{od} al cammino p^* di costo minimo. Un tale modello di assegnazione, noto come "*tutto o niente*", è stato nei fatti utilizzato nella pianificazione delle grandi reti autostradali statunitensi fino all'inizio degli anni '70.

2.1 Il modello logit di tipo globale

Nel 1971, in [6], Dial propose il primo modello di tipo stocastico per problemi di trasporto. Come tutti i modelli stocastici che gli sono succeduti, esso si basa sull'ipotesi che, mentre il pianificatore è in grado di assegnare un costo medio al generico cammino in base alla descrizione della rete, la percezione del costo di un cammino p da parte del viaggiatore è affetta da un *errore di percezione* ε_p; è possibile fare previsioni sul comportamento dei viaggiatori sotto l'ipotesi che gli errori di percezione siano rappresentabili da variabili aleatorie distribuite secondo una certa legge di probabilità.

In questo modo, si ottengono per la prima volta assegnazioni della domanda di trasporto che rispettano le seguenti specifiche funzionali:

i. il modello assegna a ciascun cammino efficiente o attivo una probabilità positiva, mentre assegna a ciascun cammino non efficiente una probabilità nulla;
ii. a tutti i cammini efficienti di uguale costo il modello assegna la medesima probabilità;
iii. fra due cammini efficienti di costo diverso, il modello assegna al più efficiente una probabilità maggiore.

Tutta la domanda di trasporto t_{od} viene ripartita su un sottoinsieme $P_A(o,d)$ di tutti i cammini che connettono il nodo d al nodo o, detto *insieme dei cammini efficienti* o *attivi*. In [6] un cammino attivo è definito come un cammino composto esclusivamente da archi che, presi singolarmente, determinano un

avvicinamento alla destinazione. Un tale arco è detto *arco attivo*.

Indichiamo con $V(i)$ il costo minimo dal nodo i alla destinazione d. Condizione necessaria e sufficiente affinché un arco $e = (i,j) \in A$ sia *attivo* è che risulti:

$$V(i) > V(j);$$

nel seguito indicheremo con A_A l'insieme degli archi attivi.

Sia $p \in P_A(o,d)$ un cammino attivo di costo V_p; il flusso si ripartisce secondo le probabilità individuate attraverso la legge di distribuzione di tipo logit:

$$\text{Prob}(p) = \frac{\exp(\theta V_p)}{\sum_{q \in P_A(o,d)} \exp(\theta V_q)}, \qquad \forall\, p \in P_A(o,d); \tag{2.2}$$

dove $\theta < 0$ è un parametro di calibrazione.

Si noti che $\text{Prob}(p) \geq 0$, $\forall\, p \in P_A(o,d)$, e che:

$$\sum_{p \in P_A(o,d)} \text{Prob}(p) = 1.$$

L'assegnazione della domanda t_{od} fornisce per ogni $p \in P_A(o,d)$ il flusso di cammino h_p:

$$h_p = \text{Prob}(p) t_{od}, \qquad \forall\, p \in P_A(o,d);$$

il flusso $x(i,j)$ risultante sull'arco $e = (i,j) \in A_A$ è dato da:

$$x(i,j) = \sum_{p \in P_A(o,d)} h_p\, \delta_{ij}^p = t_{od} \sum_{p \in P_A(o,d)} \text{Prob}(p)\, \delta_{ij}^p = \text{Prob}((i,j)) t_{od}, \qquad \forall\, e = (i,j) \in A_A; \tag{2.3}$$

dove

$$\text{Prob}(e) = \sum_{p \in P_A(o,d)} \delta_{ij}^p \text{Prob}(p), \qquad \forall\, e = (i,j) \in A_A;$$

è la probabilità di attraversare l'arco $e = (i,j)$ nello spostamento da o a d.

2.2 Il modello logit di tipo gerarchico

Le definizioni di archi e cammini attivi introdotte in [6] inducono due importanti proprietà, fortemente utilizzate nella fase algoritmica:

1. ogni sequenza di archi attivi forma un cammino attivo, e pertanto sarà possibile determinare l'insieme dei cammini attivi senza nessun aggravio computazionale;
2. $G_A = (N, A_A)$, il grafo di tutti e soli i cammini attivi che connettono i nodi o e d, è un grafo aciclico; ciò consente di definire un relazione di ordinamento topologico $\leq_T$ sull'insieme dei nodi N:

$$i_h \leq_T i_k \Rightarrow V(i_h) \leq V(i_k), \qquad i_h, i_k \in N.$$

Utilizzando l'ordinamento topologico nella scansione del grafo si può calcolare in modo ricorsivo una serie di coefficienti che consentono di valutare la probabilità di utilizzo di ciascun arco $e = (i,j)$ condizionata all'aver raggiunto il nodo i; mediante tali probabilità condizionate si può effettuare l'assegnazione della domanda senza l'enumerazione dei cammini attivi.

Dato un nodo $i \neq d$, sia $P_A(i,d)$ l'insieme dei cammini attivi da i a d e $FS_A(i)$ l'insieme degli archi attivi uscenti da i, detta *stella uscente attiva* del nodo i. Nella (2.2) e per la (2.1) si ha:

$$\exp(\theta V_p) = \exp(\theta \sum_{(u,v)\in p} c(u,v)) = \prod_{(u,v)\in p} \exp(\theta c(u,v)) = \prod_{e\in p} \alpha(e), \qquad \forall\, p \in P_A(i,d) \qquad (2.4)$$

essendo

$$\alpha(e) = \exp(\theta c(u,v)), \qquad \forall\, e = (u,v) \in A_A. \qquad (2.5)$$

Quindi, per l'additività del costo V_p, la probabilità di utilizzo di un cammino può essere espressa in funzione di una serie di coefficienti locali $\alpha(e)$ che dipendono dal costo degli archi e che lo compongono:

$$\text{Prob}(p) = \frac{\prod_{e\in p} \alpha(e)}{\sum_{q\in P_A(i,d)} \prod_{e'\in q} \alpha(e')}, \qquad \forall\, p \in P_A(i,d). \qquad (2.6)$$

Separando i cammini $q \in P_A(i,d)$ per gruppi di cammini che iniziano con lo stesso arco $e = (i,j)$, il denominatore di (2.6) diviene:

$$\sum_{q\in P_A(i,d)} \prod_{e'\in q} \alpha(e') = \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e) \sum_{q\in P_A(j,d)} \prod_{e'\in q} \alpha(e') = \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e) W(j),$$

dove

$$W(j) = \sum_{q\in P_A(j,d)} \prod_{e\in q} \alpha(e). \qquad (2.7)$$

Il *peso* $W(j)$ è una misura di efficienza del nodo j o, in altri termini, una misura di efficienza dell'insieme dei cammini attivi da j a d; pertanto la misura di efficienza $W(i)$ può essere definita analogamente:

$$W(i) = \sum_{q\in P_A(i,d)} \prod_{e'\in q} \alpha(e') = \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e) W(j). \qquad (2.8)$$

Consideriamo ora un arco attivo $e = (i,r)$ uscente dal nodo i e l'insieme $P_A(i,r,d)$ dei cammini attivi da i a d che iniziano con l'arco e . La probabilità Prob(e) che, partendo da i per andare in d, si utilizzi $e = (i,r)$ è data dalla somma delle probabilità dei cammini appartenenti a $P_A(i,r,d)$:

$$\text{Prob}(e) = \sum_{p\in P_A(i,r,d)} \text{Prob}(p) = \frac{\alpha(e) W(r)}{W(i)}, \qquad e = (i,r) \in FS_A(i). \qquad (2.9)$$

La (2.9) è ottenuto applicando le stesse trasformazioni utilizzate per determinare la (2.8).

Il modello gerarchico si basa sul calcolo iterato dei pesi $W(i)$ secondo la (2.8) per tutti i nodi del grafo attivo e non solo per il nodo origine e i nodi adiacenti; attraverso una visita dei nodi del grafo attivo G_A secondo l'ordine topologico $\leq_T$ dalla destinazione verso tutti i nodi origine, si calcola ricorsivamente, $\forall\, i \in N$, il peso $W(i)$:

$$W(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = d; \\ \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)\ W(j), & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad \forall\, i \in N. \qquad (2.10)$$

Mediante i pesi $W(i)$, $i \in N$, si ottiene il *coefficiente di ripartizione locale* per ogni arco attivo e , cioè la probabilità di utilizzare l'arco e subordinatamente all'aver raggiunto il nodo i:

$$\text{Prob}(e|i) = \beta(e, i) = \alpha(e) \frac{W(j)}{W(i)}, \qquad \forall\, e = (i,j) \in A_A. \qquad (2.11)$$

Il flusso $x(i,j)$ dell'arco $e = (i,j) \in A_A$ può essere ricavato dal flusso $y(i)$ di attraversamento del nodo i:

$$x(i,j) = \beta(e,i)y(i) = \alpha(e)\,\frac{W(j)}{W(i)}\,y(i), \qquad \forall\ e = (i,j) \in A_A; \tag{2.12}$$

essendo

$$y(i) = \begin{cases} t_{id}, & \text{se } i \neq d \text{ è un nodo centroide;} \\ \displaystyle\sum_{(k,i)\in BS_A(i)} x(k,i), & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

dove $BS_A(i)$ è la *stella entrante attiva* del nodo i e t_{id} è la domanda in partenza da i.

Ottenuti i coefficienti $\beta(e, i)$, o contestualmente al loro calcolo, è possibile effettuare l'assegnazione della domanda di trasporto diretta verso una certa destinazione d congiuntamente per tutte le possibili origini. L'algoritmo risultante, iterando su tutte le destinazioni, è il seguente.

ALGORITMO DI DIAL

Passo 0 Poni $x(i,j) = 0$, $\forall\ (i,j) \in A$; quindi ripeti per ogni nodo centroide d destinazione di flusso, i seguenti passi:

Passo 1 Poni $y(i) = 0$, $\forall i \in N$, se i non è un nodo centroide; $y(o) = t_{od}$, $\forall o$ centroide;

determina, mediante l'algoritmo SPT(G, d, V) l'albero dei cammini minimi aventi d come destinazione, ottenendo il vettore V dei costi minimi;

poni $W(d) = 1$.

Passo 2 (*Backward pass*)

Per ogni nodo i, partendo da d e procedendo secondo l'ordine topologico, controlla per ciascun arco $e = (i,j) \in FS(i)$ se $V(i) > V(j)$; in caso affermativo inserisci e in A_A e calcola:

$$\alpha(e) = \exp\theta(c(i,j));$$

quindi calcola: $$W(i) = \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)\ W(j).$$

Passo 3 (*Forward pass*)

Per ogni nodo i, partendo dal nodo origine più lontano e procedendo secondo l'ordine topologico inverso, e per ogni arco $e = (i,j) \in FS_A(i)$ poni:

$$z = y(i) \cdot \alpha(e)\,\frac{W(j)}{W(i)}; \quad y(j) = y(j) + z; \quad x(i,j) = x(i,j) + z.$$

2.3 L'equivalenza tra i due modelli

Mostreremo ora che le due formulazioni globale e gerarchica sono equivalenti. La probabilità di utilizzo di un cammino $p \in P_A(o,d)$ è proporzionale, secondo un parametro costante k di normalizzazione, al prodotto dei coefficienti $\alpha(e)$ associati agli archi che lo compongono:

$$\text{Prob}(p) = k \prod_{e\in p} \alpha(e), \qquad \forall\ p \in P_A(o,d);$$

dove

$$k = \frac{1}{\sum_{q \in P_A(o,d)} \prod_{e' \in q} \alpha(e')}.$$

La probabilità condizionale di utilizzare l'arco $e = (i,j)$ subordinatamente all'aver raggiunto il nodo i è per definizione espressa come:

$$\text{Prob}(e|i) = \frac{\text{Prob}(e)}{\sum_{e' \in FS_A(i)} \text{Prob}(e')}. \tag{2.13}$$

Consideriamo l'insieme $P_A(o,i)$ di tutti i cammini attivi da o a i e l'insieme $P_A(j,d)$ di tutti i cammini attivi da j a d: ogni cammino attivo $p \in P_A(o,d)$ che utilizza l'arco $e = (i,j)$ può essere partizionato in tre sottocammini (eventualmente vuoti), $p^i \in P_A(o,i)$, $\{(i,j)\}$ e $p^j \in P_A(j,d)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\text{Prob}(e) &= \sum_{p \in P_A(o,d)} \delta_{ij}^p \, \text{Prob}(p) = \sum_{p \in P_A(o,d)} \delta_{ij}^p \, k \prod_{e' \in p} \alpha(e') \\ &= k\,\alpha(e) \left[\sum_{p \in P_A(o,i)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \left[\sum_{p \in P_A(j,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right].\end{aligned}$$

Allora la probabilità condizionata (2.13) per $e = (i,j)$ si esprime come:

$$\begin{aligned}\text{Prob}(e|i) &= \frac{k\,\alpha(e) \left[\sum_{p \in P_A(o,i)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \left[\sum_{p \in P_A(j,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right]}{\sum_{e''=(i,v) \in FS_A(i)} \left\{ k\,\alpha(e'') \left[\sum_{p \in P_A(o,i)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \left[\sum_{p \in P_A(v,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \right\}} \\ &= \frac{k\,\alpha(e) \left[\sum_{p \in P_A(o,i)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \left[\sum_{p \in P_A(j,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right]}{\left[k \sum_{p \in P_A(o,i)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right] \sum_{e''=(i,v) \in FS_A(i)} \left[\alpha(e'') \sum_{p \in P_A(v,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right]},\end{aligned}$$

da cui si può semplificare al numeratore e al denominatore sia la costante k che il contributo relativo a tutti i sottocammini da o ad i; per cui, applicando la (2.7) e la (2.8) si ha:

$$\text{Prob}(e|i) = \frac{\alpha(e) \left[\sum_{p \in P_A(j,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right]}{\sum_{e''=(i,v) \in FS_A(i)} \left[\alpha(e'') \sum_{p \in P_A(v,d)} \prod_{e' \in p} \alpha(e') \right]} = \frac{\alpha(e) W(j)}{W(i)} = \beta(e, i).$$

Si ottiene pertanto la (2.11), dimostrando quindi l'equivalenza dell'assegnazione ottenuta dall'algoritmo gerarchico con l'assegnazione prevista dal modello probabilistico globale.

2.4 Debolezze del modello di Dial

Commentiamo ora quanto la riduzione nell'assegnazione a tutti e soli i cammini attivi sia coerente con l'impostazione dei modelli stocastici.

Consideriamo il grafo in figura 2.1.

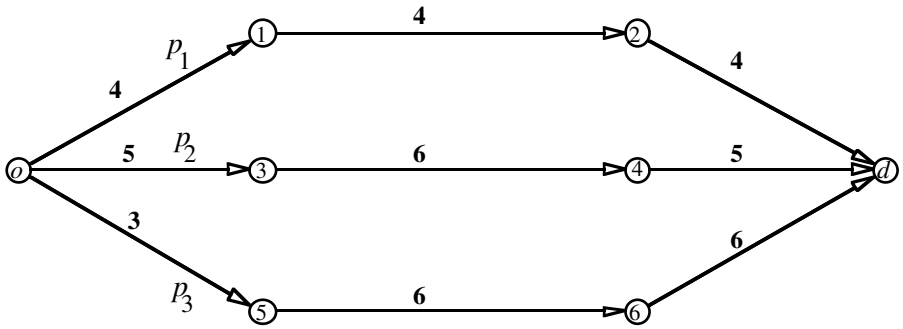


fig. 2.1 Un grafo di trasporto con tre cammini tra *o* e *d*

Esso rappresenta una rete di trasporto in cui il viaggiatore diretto da *o* verso *d* ha a sua disposizione tre cammini p_1, p_2 e p_3 di costo rispettivamente $V_{p_1} = 12$, $V_{p_2} = 16$, $V_{p_3} = 15$.

Simulando il comportamento del modello proposto da Dial su un tale grafo, vediamo che p_1 è il cammino di minimo costo; pertanto l'etichetta del nodo origine è $V(o) = 12$. Poiché l'etichetta assegnata al nodo 5 è $V(5) = 12$, l'arco $(o,5)$ verrà considerato *non attivo* dalla definizione (2) e quindi tutto il cammino p_3 sarà escluso dall'assegnamento del flusso. Eppure p_3 ha un costo inferiore a quello del cammino p_2; nella logica di un modello di assegnazione di tipo stocastico ci si attende che a p_3 venga assegnata una quantità di flusso non nulla.

Pertanto, il concetto di *cammino attivo* introdotto ha delle conseguenze maggiori di quanto potrebbe apparire a prima vista. Non vi è, di fatto, nessun legame tra ciò che in (i) è stata indicata come “efficienza” di un cammino p e il costo V_p del cammino stesso: il cammino di costo minimo sarà certamente considerato “efficiente” ma tra due cammini non minimi è possibile che il modello consideri “efficiente” solo il peggiore dei due.

Al di là dei limiti dell'approccio proposto, lo stesso modello logit è messo in discussione per le sue debolezze intrinseche che mal si adattano al problema della scelta dei percorsi.

La critica più frequente riguarda l'ipotesi, sottintesa dal modello logit, di indipendenza degli eventi aleatori che ne influenzano l'assegnazione del flusso. La giustificazione teorica dell'utilizzo della forma logit parte dall'ipotesi che la scelta dell'utente sul cammino da percorrere sia determinata da un errore di percezione ε_p rispetto al costo medio V_p del generico cammino a disposizione e che gli errori di percezione siano rappresentabili attraverso un insieme di variabili aleatorie indipendenti (e identicamente distribuiti secondo la legge di Weibull e Gumble).

Mostriamo ora un esempio che mette in risalto il limite di tale ipotesi.

Consideriamo il grafo in figura 2.2 e supponiamo di avere una domanda $t_{od} \neq 0$.

In esso sono contenuti tre cammini attivi, ciascuno di costo pari a 30. Avendo lo stesso costo, per l'ipotesi di indipendenza delle variabili aleatorie che rappresentano i cammini, il modello ripartirà la domanda di trasporto equamente tra p_1, p_2 e p_3.

Tale assegnazione non rispecchia quanto ci si attende nella realtà: i cammini p_2 e p_3 sono quasi identici per la successione di spostamenti elementari che li compongono (differiscono solo per un tratto finale, molto breve rispetto alla loro lunghezza complessiva) ed è verosimile che chi parte dal nodo *o* percepisca solo due percorsi come alternativi, rappresentati rispettivamente dal cammino p_1 e dai cammini p_2 e p_3 congiuntamente; nella realtà, quindi, i viaggiatori tenderanno a ripartirsi equamente tra gli archi $(o,1)$ e $(o,3)$ e questi ultimi, successivamente, a ripartirsi tra gli archi (4,5) e (4,6).

Tuttavia, gli "inconvenienti" del modello logit sono universalmente tollerati nel caso si analizzino reti di trasporto a bassa congestione.

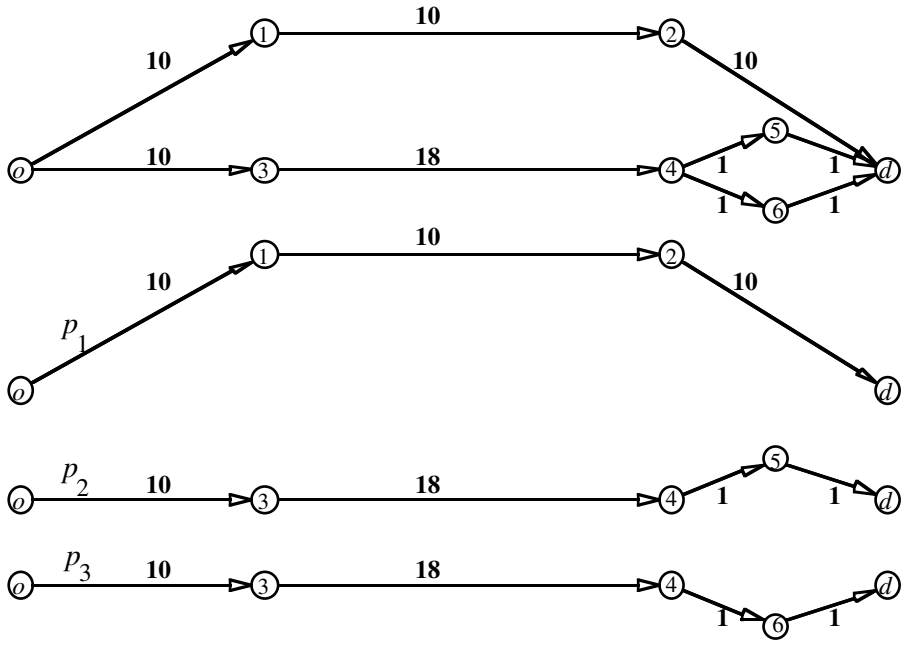


fig. 2.2 Un grafo attivo per la coppia *od* composto da tre cammini di uguale costo.

3. Generalizzazione agli ipergrafi di trasporto collettivo

In un sistema di trasporto collettivo urbano il comportamento dei viaggiatori è vincolato dalla presenza di un insieme di linee di trasporto che percorrono, con una data frequenza e con tempi di percorrenza noti, determinati tragitti. Per maggiori dettagli si rinvia a [9, 10, 12, 13].

3.1 Il grafo del trasporto collettivo

Nel grafo che descrive un sistema di trasporto collettivo ciascuna linea è rappresentata da una sequenza alternata di nodi e archi, detti *nodi di linea* e *archi a bordo*; a ciascuna linea è associata la frequenza φ di passaggio dei veicoli (numero di corse per unità di tempo). La possibilità di accedere alle varie linee (salire e scendere dai veicoli) viene rappresentata attraverso particolari nodi fittizi, detti *nodi fermata*, uno per ciascun luogo in cui si può accedere ad almeno una linea, e da un insieme di *archi di salita* e di *archi di discesa* da e verso i nodi di linea (vedi figura 3.1); infine, come sul grafo del trasporto privato, tutto il flusso di trasporto dovrà avere origine e destinazione nei *nodi centroide*, che saranno connessi ai nodi fermata da *archi a piedi* (altri archi a piedi potranno connettere due nodi fermata tra cui è verosimile uno spostamento a piedi dei viaggiatori).

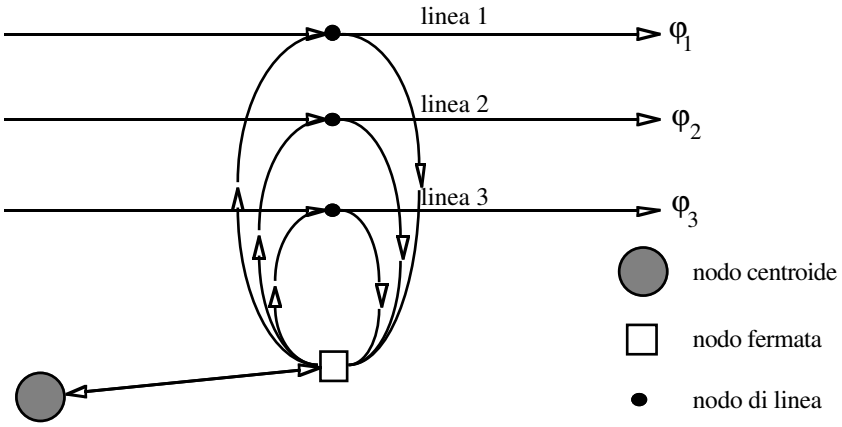


fig. 3.1 Gli elementi costitutivi di un grafo che descrive un sistema di trasporto collettivo.

In [13], per semplificare le formule, il nodo fermata i viene ulteriormente suddiviso in un nodo i" con archi di salita uscenti e diretti verso i nodi di linea delle linee incidenti nella fermata e un nodo i' in cui entrano gli archi di discesa e da cui escono gli archi a piedi verso i centroidi e le altre fermate. L'arco (i',i") rappresenta la "decisione" di utilizzare una o più linee tra quelle che servono la fermata i. Nel seguito adotteremo la formalizzazione originaria data in [10].

3.2 Il costo del trasporto collettivo

La maggiore capacità descrittiva indotta dal nuovo grafo di trasporto consente di rappresentare più dettagliatamente gli elementi che compongono un viaggio tipo, e i rispettivi costi, su una rete di trasporto collettivo.

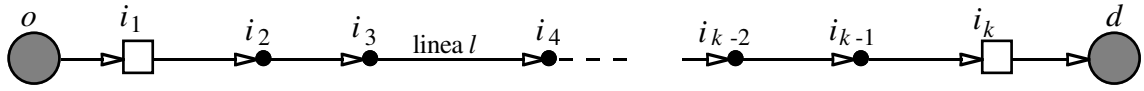


fig. 3.2 La struttura di un cammino elementare su un F-grafo di trasporto.

Consideriamo il caso in figura 3.2 di un cammino $q \in P_{od}$ che prevede l'accesso ad una sola linea (in generale, un cammino prevederà l'utilizzo di più linee consecutivamente): il primo arco (o,i_1) è un arco a piedi e rappresenta lo spostamento del viaggiatore nella fermata in cui ha deciso di attendere l'arrivo di un autobus della linea l; il successivo arco (i_1,i_2) è di salita e rappresenta l'evento "un autobus appartenente alla linea l arriva alla fermata ed egli vi monta"; seguiranno un certo numero di archi a bordo (i_2,i_3), (i_3,i_4), ...,(i_{k-2},i_{k-1}) che rappresentano il tragitto con cui il bus porta il viaggiatore in prossimità dell'ultima fermata di l percepita come utile; da qui il viaggio prosegue con un arco di discesa (i_{k-1},i_k), dove i_k è un nodo fermata e si conclude nella destinazione d con l'arco a piedi (i_k,d). Nel caso di cammini che prevedono l'utilizzo di più linee esisteranno diverse sequenze di archi a bordo, intervallate da archi di discesa, archi di salita e possibili archi a piedi fra nodi fermata.

Analizziamo ora gli elementi che compongono il costo generalizzato, cioè il disagio percepito, di un simile tragitto. Il costo $c(o,i_1)$ (così come $c(i_k,d)$) è sostanzialmente proporzionale alla distanza da percorrere e al valore di un parametro γ che misura il disagio di dover eseguire uno spostamento a piedi piuttosto che in autobus; γ è il costo generalizzato per unità di tempo trascorsa in uno spostamento a piedi;

Il costo $c(i_1,i_2)$ dell'arco di salita rappresenta il disagio percepito nell'attesa che arrivi alla fermata l'autobus prescelto, costo non irrilevante dal punto di vista del disagio percepito; il costo dovuto all'attesa è proporzionale al tempo di attesa e ad un parametro η che ne misura la percezione. Concettualmente il costo dell'attesa dovrebbe essere associato ai nodi fermata, ma per ragioni modellistiche si preferisce assegnarlo agli archi di salita.

Il costo dell'arco di discesa $c(i_{k-1},i_k)$ viene posto pari a una costante δ che misura il disagio di dover compiere trasbordi e penalizza i percorsi che, a parità di tempo di percorrenza, prevedono l'utilizzo di un maggior numero di linee.

Il costo degli archi a bordo coincide con il tempo di percorrenza, essendo il coefficiente di costo generalizzato per unità di tempo trascorsa sull'autobus posto per convenzione = 1.

3.2.1 Il costo dei cammini

Il costo V_q del cammino q è ancora un costo additivo definito come somma dei costi associati ai vari tipi di arco:

$$V_q = \sum_{h=0}^{k} c(i_h,i_{h+1}), \qquad \text{con } i_0 = o \text{ e } i_{k+1} = d.$$

La presenza di un nuovo tipo di grafo di trasporto non spiega di per sé i motivi per cui gli algoritmi di assegnazione "classici" non risultano adeguati allo studio del trasporto collettivo. Il motivo di questa inadeguatezza sta invece nella discontinuità di arrivo degli autobus alle fermate e, di conseguenza, nella particolare strategia di viaggio che l'utente razionale adotta per minimizzare il proprio tempo di viaggio.

Abbiamo visto che, nel caso del trasporto privato, il viaggiatore "razionale" sceglie tra i cammini a disposizione quello che *percepisce* come di costo minimo.

Siccome l'utente non è in grado di stabilire *a priori* in quale ordine gli autobus delle diverse linee arriveranno alle fermate cui egli si troverà, di volta in volta, ad aspettare, egli non è in grado di stabilire *a priori* quale sia il cammino con il quale raggiungerà la propria destinazione; egli potrà, *prima* di iniziare il viaggio, individuare un insieme di cammini possibili, detto *insieme attrattivo*, ma il cammino specifico effettivamente percorso dipenderà esclusivamente dal caso, cioè dal verificarsi o meno degli eventi aleatori legati all'ordine di arrivo degli autobus alle fermate.

A titolo di esempio, consideriamo il caso in figura 3.3:

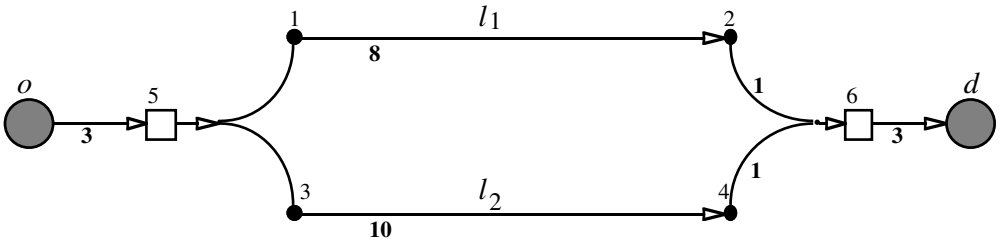


fig. 3.3 Due distinti cammini elementari che il viaggiatore razionale considera entrambi utili.

Il viaggiatore diretto da *o* verso *d* ha a disposizione i cammini q_1 e q_2, che utilizzano rispettivamente le linee l_1 e l_2 e che prevedono il passaggio di un autobus ogni 15 minuti. Ipotizzando che egli arrivi alla fermata in modo statisticamente indipendente dal momento del passaggio degli autobus (presi singolarmente) i due cammini avrebbero ciascuno un costo di attesa medio *w* alla fermata di 7,5 minuti ed un costo complessivo di $V_{q_1} = 22{,}5$ e $V_{q_2} = 24{,}5$. In questo caso, l'algoritmo di assegnazione *classico* fornirebbe una ripartizione del flusso fra le due linee secondo due valori di probabilità definiti dalla (2.2)

$$\text{Prob}(q_1) = \frac{\exp(\theta V_{q_1})}{\exp(\theta V_{q_1})+\exp(\theta V_{q_2})} \qquad \text{e} \qquad \text{Prob}(q_2) = \frac{\exp(\theta V_{q_2})}{\exp(\theta V_{q_1})+\exp(\theta V_{q_2})}.$$

In realtà, il viaggiatore non compie una scelta anticipata ma, arrivando alla fermata, egli è disposto a salire sul primo autobus che passa tra quelli delle linee l_1 e l_2; pertanto egli potrà percorrere sia il cammino q_1 che il cammino q_2 (indicheremo questa possibilità come la collezione di cammini $q_{1\text{-}2}$). Le due linee sono dette *linee attrattive* per il viaggiatore; essendo l'intertempo medio di 7,5 minuti, egli attenderà mediamente solo 3,75 minuti e la speranza matematica del costo del suo viaggio sarà $V_{q_{1\text{-}2}} = 19{,}75$.

$$V_{q_{1\text{-}2}} = w + \text{Prob}(l_1)V_{q_1} + \text{Prob}(l_2)V_{q_2} = 3{,}75 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 19{,}75.$$

La scelta che razionalmente corrisponde al minimo tempo di viaggio è quindi quella di considerare i due cammini q_1 e q_2 come un'unica alternativa di percorso $q_{1\text{-}2}$ (eventualmente in competizione con altri insiemi di cammini). In questo caso, la domanda di trasporto si ripartirà fra i due cammini q_1 e q_2 non in funzione del costo generalizzato di entrambi ma in funzione delle probabilità degli eventi "il primo autobus che passa appartiene alla linea l_1" e "il primo autobus che passa appartiene alla linea l_2"; cioè in funzione delle rispettive frequenze delle linee coinvolte. Nell'esempio, siccome le due linee hanno uguale frequenza, la probabilità di percorrere q_1 o q_2 è del 50%.

3.2.2 F-grafi, F-archi e F-cammini

Formalizziamo quanto detto precedentemente a titolo di esempio rinviando a [7, 8] per maggiori dettagli sugli ipergrafi orientati.

Definiamo un *F-grafo* come una coppia $H = (N, E)$ dove $N = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ è l'insieme dei *nodi* ed $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ è l'insieme degli *F-archi*. In un *F-arco* $e = (t(e),h(e))$, il nodo $t(e) \in N$ è detto *coda* dell'F-arco e l'insieme $h(e) \subseteq N \setminus t(e)$ è detto *testa* dell'F-arco. Notiamo che se $|h(e)| = 1$ un F-arco su un F-grafo equivale ad un arco ordinario $e = (i,j)$ di un grafo orientato. Un F-grafo *pesato* è un F-grafo in cui a ciascun F-arco e viene associato un costo $c(e)$ ($c(e) = c(i,j)$ per gli archi ordinari) e un insieme di coefficienti di ripartizione interna $\pi(e,j)$, $\forall\, j \in h(e)$:

$$\pi(e,j) \geq 0, \qquad \forall\, j \in h(e),$$

$$\sum_{j \in h(e)} \pi(e,j) = 1.$$

Ovviamente l'arco ordinario $e = (i,j)$ ha coefficiente $\pi(e,j) = 1$.

Un F-arco $e = (i,h(e))$ è detto *F-arco di supporto* se non esistono F-archi $\tilde{e} = (i,h(\tilde{e}))$ con $h(\tilde{e}) \supset h(e)$. Gli F-archi non di supporto sono detti *F-archi contenuti*. Pertanto, dato un F-arco di supporto $e = (i,h(e))$, ad esso sono associati tutti gli F-archi contenuti $e' = (i,h(e'))$, con $h(e') \subseteq h(e)$.

Un *F-grafo di supporto* è un F-grafo in cui vengono rappresentati e considerati esplicitamente solo gli F-archi di supporto, mentre gli F-archi contenuti sono derivati implicitamente da essi.

Un *cammino* q_{xy}, formato da m F-archi, che connette il nodo y al nodo x su un F-grafo è definito come una sequenza di nodi ed F-archi:

$$q_{xy} = (x = t(e_1), e_1, t(e_2), e_2, ..., e_m, y),$$

dove

$$t(e_{i+1}) \in h(e_i) \text{ per } i = 2, ..., m\text{-}1, \text{ e } y \in h(e_m).$$

Un *F-cammino* p_{xy} è il minimo insieme aciclico di cammini q_{xy} che divergono tra loro solo negli F-archi e tale che la destinazione y sia connessa ad ogni nodo appartenente a p_{xy}.

Il nuovo grafo di trasporto collettivo introdotto all'inizio del capitolo è quindi un *F-grafo di supporto* $H = (N, E)$ in cui gli archi di tipo classico $e = (i,j)$ sono gli archi a bordo, gli archi a piedi e gli archi di discesa da un veicolo, mentre il generico F-arco di supporto $e = (i,h(e))$, con $h(e) = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ rappresenta l'insieme degli archi di salita a una fermata servita dalle linee $\{l_1, l_2, ..., l_k\}$. Dato $e = (i,h(e))$, un F-arco contenuto $e' = (i,h(e'))$, con $h(e') \subseteq h(e)$, rappresenta il caso in cui un viaggiatore diretto da o a d in prossimità del nodo fermata i considera *attrattivo* l'insieme delle linee $L'_i = \{l_{i_1}, l_{i_2}, ..., l_{i_h}\}$, cioè è disposto a salire sul primo autobus che passa tra quelli appartenenti alle linee scelte; per questo $e' = (i,h(e'))$ verrà indicato nel seguito come *F-arco di salita*. La rappresentazione della rete e delle scelte a disposizione del viaggiatore attraverso un F-grafo di supporto consente di considerare in modo compatto tutti i possibili F-archi di salita (che possono essere in numero esponenziale) e quindi di tenere sotto controllo la complessità degli algoritmi rispetto alla memoria necessaria: infatti, ciascun F-arco di supporto $e = (i,h(e))$ con $|h(e)| = k$ contiene e rappresenta 2^k -1 F-archi di salita; vedremo nel seguito come trattare gli F-archi contenuti in e in modo da tenere sotto controllo anche la complessità degli algoritmi in termini di tempo di calcolo.

3.2.3 Il costo degli F-cammini

È possibile associare un *costo* a ciascun F-cammino p presente nell'F-grafo di supporto, sotto le seguenti ipotesi:

ipotesi 1 *ogni utente sceglie quale tipo di percorso effettuare in modo ricorsivo: per ogni fermata in cui si troverà ad attendere avrà già scelto l'insieme delle linee sulle quali è disposto a salire e per ciascuna di esse la fermata a cui scendere e come proseguire il proprio viaggio;*

ipotesi 2 *l'arrivo di un autobus alla fermata sarà statisticamente indipendente dall'arrivo di altri autobus, appartenenti ad altre linee, alla medesima fermata; l'arrivo di due autobus appartenenti alla stessa linea avverrà, mediamente, dopo un tempo proporzionale all'inverso della frequenza della linea;*

ipotesi 3 *i passeggeri arrivano ad ogni nodo fermata che si trovi lungo il tragitto scelto in maniera casuale e indipendente dall'arrivo degli autobus, e salgono sempre sul primo autobus che passa tra quelli che appartengono al proprio "insieme attrattivo".*

Gli archi ordinari, del tipo $e = (i,j)$, sono *pesati* una volta per tutte con un costo generalizzato $c(i,j)$ (con un coefficiente di ripartizione interna $\pi(e,j) = 1$).

Sia $e = (i,h(e))$ il generico F-arco di supporto e sia φ_j la frequenza della linea corrispondente al nodo $j \in h(e)$. Indichiamo con $e' = (i,h(e'))$ un suo F-arco contenuto e con L'_i il corrispondente insieme attrattivo; il tempo di attesa $w(e')$ per e', ovvero il costo generalizzato $c(e')$, è:

$$c(e') = w(e') = \frac{\eta}{\Phi(e')}, \tag{3.1}$$

dove

$$\Phi(e') = \sum_{j \in h(e')} \varphi_j, \tag{3.2}$$

rappresenta la *frequenza combinata* dell'insieme attrattivo L'_i. I coefficienti di ripartizione interna ad e', ovvero la probabilità dell'evento esogeno "dal momento che il passeggero comincia la sua attesa alla fermata, il primo autobus che passa appartiene alla linea corrispondente al nodo j", per le ipotesi precedenti sono:

$$\pi(e',j) = \frac{\varphi_j}{\Phi(e')}, \qquad \forall\, j \in h(e'). \tag{3.3}$$

Considerata la generica coppia od, il costo $V_p(i)$ di un F-cammino p_{id} che connette il nodo i alla destinazione d (o speranza matematica del costo di viaggio) è definito ricorsivamente come

$$V_p(d) = 0;$$

$$V_p(i) = \begin{cases} c(i,j) + V_p(j), & \text{se } e = (i,j); \\ w(e') + \sum_{j \in h(e')} \pi(e',j)\, V_p(j), & \text{se } e' \text{ è un F-arco di salita.} \end{cases} \tag{3.4}$$

$V_p(o)$ è il costo dell'intero F-cammino p_{od}; esso rappresenta la *speranza matematica del costo per ogni passeggero che adotta la strategia di viaggio rappresentata dall'F-cammino p*.

Anche sugli *F-grafi di supporto* indichiamo con $V(i)$ il costo tra il nodo i e la destinazione percorrendo l'F-cammino di costo minimo tra tutti gli F-cammini che connettono i a d. $V(i)$ può essere calcolato $\forall\, i \in N$ attraverso uno degli algoritmi di ipercammino minimo presenti in letteratura [9, 11].

3.3 Una generalizzazione del modello logit al trasporto collettivo

Presentiamo ora la generalizzazione del modello di assegnazione di Dial al caso del trasporto collettivo proposta da Nguyen, Pallottino e Gendreau in [13].

I viaggiatori associati alla coppia *od* hanno a disposizione un certo numero di alternative di percorso; ciascuna alternativa corrisponde ad un F-cammino che rappresenta una strategia di viaggio tesa a minimizzare la speranza matematica del costo generalizzato.

Un modello di assegnazione della domanda si basa sulle caratteristiche seguenti:

1. come determinare l'insieme delle alternative da considerare;
2. come ripartire il flusso tra le alternative considerate.

Per quanto riguarda la 2, il flusso verrà ripartito attraverso un modello stocastico che distribuisce gli errori di percezione secondo una legge di probabilità di tipo logit.

3.3.1 La similitudine con il modello logit di Dial: archi e F-archi attivi

Ricordiamo che in [6], un cammino è *attivo* solo se è composto da una sequenza di archi $e = (i,j)$ *attivi*, cioè tali che ciascuno di essi avvicina il viaggiatore alla destinazione.

Sull'F-grafo di supporto, uno spostamento elementare può corrispondere all'attraversamento di un arco di tipo $e = (i,j)$ (a bordo, discesa o spostamento a piedi); ma può corrispondere all'attraversamento di un F-arco di salita $e' = (i,h(e'))$ contenuto nell'F-arco di supporto $e = (i,h(e))$. Per gli F-archi del primo tipo, la condizione di avvicinamento proposta da Dial come criterio di efficienza di un arco può essere riproposta tale e quale, per cui $e = (i,j)$ è *attivo* se

$$V(i) > V(j). \tag{3.5}$$

Per gli F-archi di salita $e' = (i,h(e'))$ occorrono alcune considerazioni aggiuntive. Ricordiamo che se $|h(e)| = k$, cioè al nodo fermata i si arrestano k linee di trasporto, allora e contiene e rappresenta $2^k - 1$ F-archi di salita distinti; solo uno di questi, $e^* = (i,h(e^*))$, sarà l'*F-arco di salita ottimo*, che corrisponde al sottoinsieme di linee che minimizzano la speranza matematica del costo.

Sia p^* l'F-cammino da i a d individuato dall'F-arco di salita ottimo; il costo $C(e^*)$ è dato da:

$$C(e^*) = w(e^*) + \sum_{j \in h(e^*)} \varphi_j \, V(j);$$

da cui, il costo dell'ipercammino p^* è:

$$V_{p^*}(i) = C(e^*).$$

L'F-arco di salita ottimo possiede la proprietà seguente (vedi [9]):

$$\begin{aligned} &V_{p^*}(i) > V(j), && \forall\, j \in h(e^*); \\ &V_{p^*}(i) \le V(j), && \forall\, j \in h(e) \backslash h(e^*). \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'F-arco di salita ottimo viene determinato mediante un algoritmo che, utilizzando le etichette $V(j)$, $\forall\, j \in h(e)$, inserisce in $h(e^*)$ i nodi $j \in h(e)$ in ordine non decrescente di costo minimo dalla destinazione, fino a quando ciò fa registrare una diminuzione del valore di $C(e^*)$.

Dalla (3.6) si ha una ulteriore proprietà nel caso in cui p^* sia l'F-cammino di costo minimo da i a d:

$$p^* = \operatorname{argmin}\{ V_p \mid p \in P_{id} \}; \tag{3.7}$$

essendo $V(i) = V_{p^*}(i)$, la condizione (3.2) diviene:

$$V(i) > V(j), \qquad \forall\, j \in h(e^*). \tag{3.8}$$

Sotto l'ipotesi (3.7), l'F-arco di salita ottimo e^* determina sempre uno spostamento verso un nodo

più vicino alla destinazione: la condizione di avvicinamento proposta da Dial può essere applicata ad ogni F-arco di salita ottimo; in tale caso è corretto considerare e^* un F-arco *attivo*.

Analizziamo il caso in cui la (3.7) non sia verificata; sia $\overline{p} = \text{argmin}\{V_p | \, p \in P_{id}\}$ l'F-cammino minimo da i a d, tale che $V(i) = V_{\overline{p}}(i) < V_{p^*}(i)$. L'efficacia dell'F-arco di salita ottimo e^* dovrà dipendere da una estensione della definizione fornita da Dial. In particolare, diremo che e^* è *attivo* se e solo se il suo utilizzo permette sempre un avvicinamento alla destinazione d, indipendentemente dal valore $w(e^*)$.

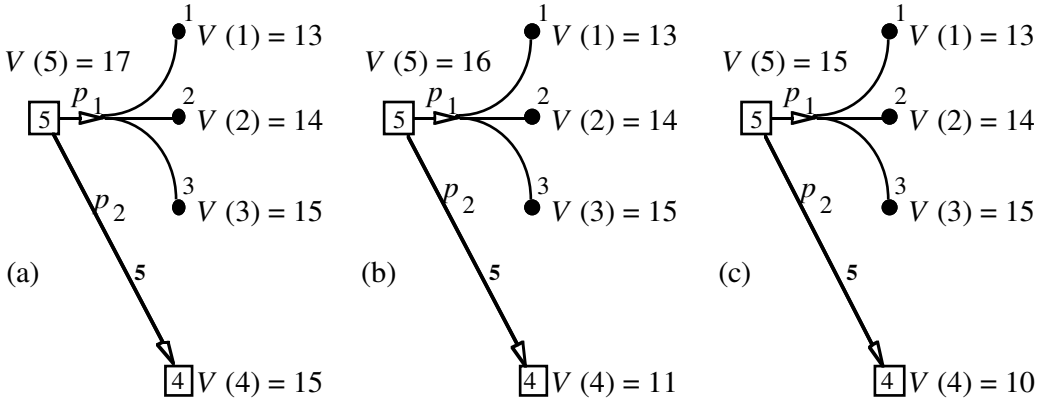
Ricordiamo che l'utente che sceglie di utilizzare l'F-arco $e^* = (i,h(e^*))$ potrà trovarsi su una qualsiasi delle linee rappresentate da $h(e^*)$ in funzione dell'evento, non dipendente dalla sua volontà, di montare sul primo autobus che arriva alla fermata tra quelli che fanno servizio sulle linee attrattive.

Pertanto, affinché e^* sia attivo, deve verificarsi la (3.8).

L'esempio in figura 3.4 contempla i vari casi che possono verificarsi. Nel caso (a) l'F-cammino di costo minimo è p_1; e^* è considerato attivo, come attivo è l'arco a piedi (5,4). Nel caso (b) l'F-cammino p_1 non è di costo minimo ma, per la (3.8), e^* è considerato attivo. Nel caso (c) p_1 non è di costo minimo e, essendo $V(5) = V(3)$, e^* non è attivo perché il suo utilizzo non garantisce un avvicinamento alla destinazione.

Come per il caso privato, la definizione dell'F-grafo attivo impone un forte indirizzo al modello di assegnazione nel suo complesso in quanto il criterio con cui si definiscono gli F-archi attivi influenza la simulazione del comportamento che l'utente medio adotta (o dovrebbe adottare) nei suoi spostamenti.

Supponiamo, per semplicità di trattazione, che il viaggiatore decida come proseguire il proprio viaggio in ogni nodo della rete in cui si trova a passare (sappiamo che per l'ipotesi 1 egli, nel momento in cui inizia il proprio viaggio, ha già scelto una propria strategia di spostamento).



$\varphi_1 = \varphi_3 = 4, \varphi_2 = 2, \Phi = 10; \qquad w(e) = \eta / \Phi = 3; \qquad \sum_{j=1}^{3} V(j)\varphi_j = 140$

fig. 3.4 Tre casi sull'efficienza di un F-arco di salita ottimo.
p_1 inizia con l'F-arco di salita di ottimo $e^* = (5, \{1, 2, 3\})$ e il suo costo è 3 + 140/10 = 17,
p_2 inizia con l'arco a piedi (5, 4) e il suo costo varia nei tre casi considerati.

Se i non è un nodo fermata, il viaggiatore è disposto a prendere in "considerazione" tutti gli archi $e = (i,j) \in FS(i)$ in cui il nodo j risulti più vicino alla destinazione di quanto non sia il nodo i secondo la (3.5) e, per ciascuno di questi, tutti gli F-cammini del grafo attivo di cui e è l'arco iniziale.

Se i è un nodo fermata, il viaggiatore ha a propria disposizione un certo numero di archi a piedi, per i quali valgono le considerazioni precedenti, e un insieme di linee attrattive che corrispondono all'F-arco di salita ottimo $e^* = (i,h(e^*))$: egli prenderà in considerazione e^* (e quindi la scelta modale di proseguire in autobus) solo se tutti i nodi di linea dell'insieme testa $h(e^*)$ sono più vicini alla destinazione di quanto non sia il nodo fermata i secondo la (3.8). Nel caso peggiore che arrivi per primo alla fermata l'autobus della linea più svantaggiosa tra quelle attrattive, lo spostamento rappresentato dal salire sull'autobus determina comunque un avvicinamento.

La condizione di ottimalità dell'F-arco di salita è una condizione necessaria, sebbene non sufficiente: nel modello proposto in [13] non è previsto che il viaggiatore si serva di altri F-archi di salita. Infatti, gli autori argomentano che la parte di viaggiatori che sceglie di attendere l'autobus alla fermata e quindi di percorrere l'F-arco di salita attivo $e^* = (i,h(e^*))$ all'arrivo del primo autobus avranno la possibilità, utilizzandolo, di "avvicinarsi alla destinazione" come in (3.8); il non montare sul primo autobus che arriva tra quelli dell'insieme attrattivo ottimo corrisponde al continuare ad attendere alla fermata e, quindi, certamente a non avvicinarsi alla destinazione.

3.3.2 Il modello logit gerarchico per ipercammini

Per assegnare il flusso, come nel caso privato, si effettua una doppia scansione del grafo per calcolare i coefficienti di ripartizione locali ai nodi e per assegnare quindi il flusso tra gli archi e gli F-archi attivi dal nodo più lontano al più vicino alla destinazione.

Nel caso del trasporto collettivo occorre tener presente che, una volta determinato l'insieme attrattivo ottimo e l'eventuale efficienza dell'F-arco di salita ottimo $e^* = (i,h(e^*))$, il flusso che attraversa e^* si ripartisce tra le diverse linee in funzione dei coefficienti $\pi(e^*,j)$ definiti in (3.3), che dipendono esclusivamente dalla frequenza delle linee coinvolte e non dal tempo con cui ciascuna linea porta alla destinazione. Per mantenere l'analogia con il modello logit gerarchico introdotto nel paragrafo 2, associamo a ciascun nodo i dell'F-grafo attivo un *peso* $W(i)$ che rappresenta la *bontà* delle alternative di percorso che passano dal nodo i da cui dipendano i coefficienti di ripartizione del flusso locali al nodo.

A tale scopo generalizziamo la definizione (2.5):

$$\alpha(e) = \exp(\theta c(i,j)) \qquad \text{se } e = (i,j) \text{ è un arco ordinario}$$

$$\alpha(e^*) = \exp(\theta w(e^*)) \qquad \text{se } e^* = (i,h(e^*)) \text{ è un F-arco di salita attivo.}$$

Il valore del peso $W(i)$ è dato da:

$$W(i)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)W(j), & i\notin NF \text{ o } e^* \text{ non attivo;} \\ \displaystyle\alpha(e^*)\prod_{j\in h(e^*)} W(j)^{\pi(e^*,j)} + \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)W(j), & i\in NF \text{ e } e^* \text{ attivo;} \end{cases} \tag{3.9}$$

dove NF rappresenta l'insieme dei nodi fermata, $FS_A(i)$ rappresenta l'insieme degli archi attivi uscenti da i e $e^* = (i,h(e^*))$ è, nel caso che i sia una fermata, l'unico possibile F-arco attivo. I pesi cono calcolabili ricorsivamente seguendo l'ordine topologico, iniziando dalla destinazione d e ponendo $W(d) = 1$.

Ovviamente, anche la definizione dei coefficienti di ripartizione locale in base ai quali si ripartisce il flusso uscente dal nodo i tra gli F-archi dell'F-grafo attivo tiene conto della diversa tipologia di archi sul nuovo grafo:

$$\begin{aligned} &\beta(e, i) = \alpha(e)\ W(j)/W(i), && e = (i,j) \text{ è un arco attivo;} \\ &\beta(e^*, i) = \alpha(e^*) \prod_{j\in h(e^*)} W(j)^{\pi(e^*,j)}/W(i), && e^* = (i,h(e^*)) \text{ è un F-arco attivo.} \end{aligned} \tag{3.10}$$

La determinazione dei coefficienti di ripartizione locale consente l'assegnazione del flusso evitando l'enumerazione di tutte le alternative di percorso. Nella generalizzazione al trasporto collettivo, però, il coefficiente di ripartizione locale $\beta(e, i)$ [$\beta(e^*, i)$] coincide con la probabilità condizionale di percorrere l'arco $e = (i,j)$ [$e^* = (i,h(e^*))$], avendo raggiunto il nodo i, definita in (2.13). Però tale probabilità condizionale differisce dalla probabilità condizionale che si sarebbe ottenuta se si fosse applicato il modello globale. Ciò è dovuto alla non additività del costo del generico F-cammino, cioè al fatto che il

meccanismo di ripartizione interna al generico F-arco di salita, dipendendo da un evento esogeno, sfugge alla regola probabilistica generale.

La caratteristica più interessante dell'assegnazione proposta in [13] è quella di riuscire a mitigare i limiti del modello logit come modello di scelta di percorso, messi in evidenza alla fine del capitolo 2. Di fatto, viene indotta una sorta di *covarianza* fra due F-cammini diretti da o verso d se questi hanno in comune un F-cammino p_{oi}. Per maggiori dettagli si rinvia a [13].

Di seguito è riportato l'insieme delle procedure che forniscono l'assegnazione del flusso, all'interno delle quali indicheremo con *NC* l'insieme dei nodi centroide.

```
Procedure Logit_Distribution(t, H)
   { 'data una matrice di domanda t e un F-grafo di supporto H '
     Initialize(H, x);
     for each d ∈ NC do {
         Shortest_Hyperpath(H, d, h*, V);
         Order_Nodes(H, d, V, h*, N_T);
         Active_F-graph(H, h*, V, H_A);
         Local_Splitting (d, H_A, h*, c, π, β);
         Flow_Distribution(t, d, H_A, h*, N_T^-1, π, β, x, y);        }
   }.
```

Initialize() pone a zero il flusso di tutti gli archi, compresi gli archi di salita che formano gli F-archi.

Shortest_Hyperpath() determina l'albero degli F-cammini minimi con radice nel nodo destinazione d; contestualmente calcola per ciascun nodo i il costo minimo $V(i)$ da i a d e determina per ciascun nodo fermata i l'insieme $h(e^*)$ che rappresenta l'F-arco di salita ottimo $e^* = (i,h(e^*))$.

Order_Nodes() determina l'ordine topologico utilizzato nelle procedure successive.

Active_F-graph() determina, in accordo con (3.5) e (3.8), l'insieme degli archi e F-archi attivi E_A, e quindi l'F-grafo attivo H_A.

```
Procedure Active_F-graph(H, h*, V, H_A)
   { (inizializzazione)
     E_A:= Ø;
     (scansione dell'F-grafo di supporto)
     for each e = (i,j) ∈ E do
         if V(i) > V(j)
             then E_A:= E_A ∪ {e};
     for each e* = (i,h(e*)) ∈ E do
         if V(i) > V(j) ∀j ∈ h(e*)
             then E_A:= E_A ∪ {e*};
   }.
```

Local_Splitting() visita i nodi del grafo secondo l'ordine topologico N_T e determina, per ciascun arco e F-arco e in E_A, un coefficiente di ripartizione locale $\beta(e,i)$ in base a cui il flusso uscente dal nodo i sarà ripartito fra tutti gli archi e gli F-archi attivi uscenti da i.

Procedure *Local_Splitting* (d, H_A, h^*, c, π, N_T, β)
{ (inizializzazione)
$W(d) := 1$; **for each** $e \in E_A$ **do** $\beta(e,i) := 0$;
(visita dei nodi dell'F-grafo attivo in ordine topologico)
for each $i \in N_T \setminus \{d\}$ **do**
{ **if** $i \in NF$ **and** $e^* = (i,h(e^*)) \in E_A$
then { $value := exp(\theta\, w(e^*)) \prod_{j \in h(e^*)} W(j)^{\pi(e^*,j)}$;
$W(i) := value + \sum_{(i,j) \in FS_A(i)} exp(\theta c(i,j)) W(j)$;
$\beta(e^*,i) := value / W(i)$;
for each $e = (i,j) \in FS_A(i)$ **do** $\beta(e, i) := exp(\theta c(i,j))\ W(j) / W(i)$; }
else { $W(i) := \sum_{(i,j) \in FS_A(i)} exp(\theta c(i,j)) W(j)$;
for each $e = (i,j) \in FS_A(i)$ **do** $\beta(e, i) := exp(\theta c(i,j))\ W(j) / W(i)$; }
}
}.

Flow_Distribution() assegna, visitando i nodi del grafo in ordine topologico inverso N_T^{-1}, il flusso t_{od} da tutti i nodi $o \in NC \setminus \{d\}$e fornisce come risultato un vettore x dei flussi sugli archi e un vettore y dei flussi sui nodi.

Procedure *Flow_Distribution*(t, d, H_A, h^*, N_T^{-1}, π, β, x, y)
{ (inizializzazione)
for each $o \in N$ **do if** $o \in NC$ **then** $y(o) := t_{od}$ **else** $y(o) := 0$;
(visita dei nodi dell'F-grafo attivo in ordine topologico inverso)
for each $i \in N_T^{-1} \setminus \{d\}$ **do**
{ **for each** $e = (i,j) \in FS_A(i)$ **do** {
$value := y(i)\ \beta(e, i)$; $x(i,j) := x(i,j) + value$; $y(j) := y(j) + value$; }
if $i \in NF$ **and** $e^* = (i,h(e^*)) \in E_A$ **then**
{ $value := y(i) \cdot \beta(e^*,i)$;
for each $j \in h(e^*)$ **do** { $x(i,j) := x(i,j) + value \cdot \pi(e^*,j)$; $y(j) := y(j) + value \cdot \pi(e^*,j)$; }
}
}
}.

In fase implementativa alcune delle operazioni descritte nelle procedure avvengono in una forma diversa, ma analoga, per ragioni di efficienza.

4. Alternative sugli F-archi attivi

Abbiamo visto l'importanza della definizione di F-grafo attivo nei modelli di assegnazione di questo tipo. D'altro canto, la definizione (3.8) è solo una tra quelle possibili. Di seguito esporremo alcune considerazioni che ci guideranno nell'esposizione di definizioni alternative alla (3.8).

La prima considerazione riguarda la condizione di aciclicità dell'F-grafo attivo: ricordiamo che l'F-grafo attivo è composto, per definizione, da tutti gli archi e F-archi attivi, cioè gli archi e F-archi ai quali il modello assegnerà una probabilità non nulla di essere percorsi. La presenza di un ciclo nell'F-grafo attivo equivale, da un punto di vista comportamentale, ad accettare che vi siano viaggiatori disposti a scegliere un percorso che passa due o più volte nello stesso punto geografico. Inoltre, da un punto di vista algoritmico, l'assenza di cicli sull'F-grafo attivo permette di calcolare iterativamente le probabilità di utilizzo degli archi e degli F-archi attivi. Pertanto, ci poniamo la condizione che qualunque definizione alternativa di F-grafo attivo debba comunque garantire l'aciclicità.

La seconda considerazione riguarda la definizione di F-arco di salita attivo. Ogni F-grafo attivo deriva dal criterio adottato per definire archi ed F-archi attivi nell'F-grafo di supporto: mentre per gli archi ordinari, di tipo $e = (i,j)$, il criterio (3.5) di avvicinamento proposto da Dial non viene modificato, sulla definizione di F-arco di salita attivo vale la pena svolgere alcune considerazioni.

Dato un F-arco di supporto $e = (i,h(e))$, tra gli F-archi di salita in esso contenuti, solo $e^* = (i,h(e^*))$ è l'F-arco di salita ottimo. In [13] solo quest'ultimo viene valutato se essere *attivo* o meno: nel seguito modificheremo questa restrizione, imponendo comunque la condizione che *se un F-arco* $e' = (i,h(e'))$ *è attivo anche* $e^* = (i,h(e^*))$ *deve risultare attivo*. Questa condizione viene imposta per rispettare il criterio (iii) proposto da Dial e descritto nel paragrafo 2. Infine, le nuove definizioni di F-arco attivo saranno una generalizzazione del *criterio di avvicinamento* descritto in [6]. Una condizione generale che garantisce la condizione di aciclicità e quella della presenza dell'F-arco ottimo fra gli F-archi attivi è data da:

$e' = (i,h(e'))$ è un *F-arco attivo* solo se

(i) $h(e') \subseteq h(e^*)$;

(ii) e^* è attivo, cioè verifica la condizione (3.8).

Nel seguito considereremo quindi la possibilità che alla stessa fermata l'utente possa percepire più F-archi attivi: quello ottimo e^* ed altri contenuti in e^* formati da sottoinsiemi dell'insieme ottimo delle linee attrattive. Ciò equivale, in termini comportamentali, ad ammettere che l'utente in attesa alla fermata possa scegliere deliberatamente di non montare sul primo autobus che passa tra quelli delle linee attrattive.

Il criterio di avvicinamento è diverso da quello, rigido e fissato a priori proposto in [13]: l'avvicinamento è verificato dal momento in cui arriva l'autobus (non necessariamente il primo) su cui l'utente monterà. Infatti, per la (3.8), se j è un nodo che rappresenta la linea attrattiva su cui l'utente monta, si avrà sempre $V(i) > V(j)$.

Analizziamo ora alcuni diversi casi.

4.1 L'insieme di tutti i sottoinsiemi attrattivi

In questo caso si presuppone che l'utente percepisca come efficiente un qualunque sottoinsieme dell'insieme delle linee attrattive se quello ottimo è efficiente.

Consideriamo un nodo i per il quale l'F-arco $e^* = (i,h(e^*))$ sia attivo, cioè verifichi la (3.8). In questo caso ogni F-arco $e' = (i,h(e'))$ tale che $\emptyset \neq h(e') \subseteq h(e^*)$ è un *F-arco attivo*; più formalmente, dato un nodo fermata i, se vale la (3.8) per e^* allora ogni F-arco $e' = (i,h(e'))$ con $\emptyset \neq h(e') \subseteq h(e^*)$ è *attivo*.

Da un punto di vista algoritmico si dovranno enumerare i $2^{|h(e^*)|} - 1$ F-archi di salita attivi; indicando con NF_A l'insieme dei nodi fermata i per i quali gli insiemi attrattivi ottimi $e^*_i = (i,h(e^*_i))$ siano attivi, la procedura che determina l'F-grafo attivo compie un numero di confronti pari a

$$\sum_{i \in NF_A} 2^{|h(e^*_i)|} - 1.$$

La procedura che determina l'F-grafo attivo in accordo a (3.5) e (3.8) è:

```
Procedure Active_F-graph(H, h*, V, H_A)
  { (inizializzazione)
    E_A:= Ø;
    (scansione dell'F-grafo di supporto)
    for each e = (i,j) ∈ E do if V(i) > V(j) then E_A:= E_A ∪ {e};
    for each e* = (i,h(e*)) ∈ E do
        if V(i) > V(j) ∀j ∈ h(e*) then
            for each e' = (i,h(e')) such that Ø ≠ h(e') ⊆ h(e*) do E_A:= E_A ∪ {e'};
  }
```

Poiché si possono avere più F-archi attivi per lo stesso nodo fermata i (e precisamente, o nessuno o $2^{|h(e^*)|}-1$) indichiamo con $FSF_A(i)$ l'insieme (eventualmente vuoto) degli F-archi attivi uscenti dal nodo i.

Sotto le nuove ipotesi, la (3.9) diventa

$$W(i)=\begin{cases} \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)W(j), & i\notin NF \text{ o } e^* \text{ non attivo;} \\ \sum_{e'\in FSF_A(i)} [\alpha(e') \prod_{j\in h(e')} W(j)^{\pi(e',j)}] + \sum_{e=(i,j)\in FS_A(i)} \alpha(e)W(j), & i\in NF \text{ e } e^* \text{ attivo;} \end{cases} \tag{4.1}$$

i coefficienti di ripartizione locale sono ottenuti secondo la (3.10) estesa agli F-archi attivi non ottimi:

$$\beta(e', i) = \begin{cases} \alpha(e')W(j)/W(i), & e' = (i,j) \in FS_A(i); \\ \alpha(e') \prod_{j\in h(e')} W(j)^{\pi(e',j)}/W(i), & e' = (i,h(e')) \in FSF_A(i). \end{cases} \tag{4.2}$$

La procedura indicata come *Local_Splitting*() si modifica come segue:

```
Procedure Local_Splitting (d, H_A, h*, c, π, N_T, β)
  { (inizializzazione)
    W(d) := 1; for each e ∈ E_A do β(e,i) := 0;
    (visita dei nodi dell'F-grafo attivo in ordine topologico)
    for each i ∈ N_T \ {d} do
    { if i ∈ NF and e* = (i,h(e*)) ∈ E_A
        then { for each e' = (i,h(e')) ∈ FSF_A(i) do value(e') := exp(θ w(e')) ∏_{j∈h(e')} W(j)^π(e',j);
               W(i) := Σ_{e'∈FSF_A(i)} value(e') + Σ_{(i,j)∈FS_A(i)} exp(θc(i,j))W(j);
               for each e' = (i,h(e')) ∈ FSF_A(i) do β(e',i) := value(e') / W(i);
               for each e = (i,j) ∈ FS_A(i) do β(e, i) := exp(θ c(i,j))W(j) / W(i);   }
        else { W(i) := Σ_{(i,j)∈FS_A(i)} exp(θc(i,j))W(j);
               for each e = (i,j) ∈ FS_A(i) do β(e, i) := exp(θc(i,j))W(j) / W(i);   }
    }
  }.
```

Conseguentemente, la nuova ripartizione del flusso dovrà solo tener conto di tutti gli F-archi di salita considerati attivi:

```
Procedure Flow_Distribution(t, d, H_A, h*, N_T^-1, π, β, x, y)
  { (inizializzazione)
    for each o ∈ N do if o ∈ NC then y(o) := t_od else y(o) := 0;
    (visita dei nodi dell'F-grafo attivo in ordine topologico inverso)
    for each i ∈ N_T^-1 \ {d} do
    { for each e = (i,j) ∈ FS_A(i) do {
          value := y(i) β(e, i); x(i,j) := x(i,j) + value;  y(j) :=y(j) + value;  }
      if i ∈ NF and e* = (i,h(e*)) ∈ E_A then
          for each e' = (i,h(e')) ∈ FSF_A(i) do
          { value := y(i)·β(e',i);
            for each j ∈ h(e') do {x(i,j) := x(i,j) + value·π(e',j);  y(j) := y(j) + value·π(e',j);}
          }
    }
  }.
```

Per quanto riguarda le caratteristiche dell'assegnazione, il maggior numero di F-archi di salita attivi in corrispondenza del generico nodo fermata, porterà ad assegnazioni che tenderanno a *preferire* la scelta di andare in autobus rispetto ai percorsi a piedi: ricordiamo però che le scelte *a piedi* potranno essere tutelate modificando opportunamente il parametro θ che regola la diversione nel modello probabilistico.

La presenza di più F-archi di salita attivi influenza il modo in cui il flusso uscente da ogni nodo fermata si ripartisce tra l'insieme delle linee per esso attrattive. Infatti ciascuna linea attrattiva è presente in $2^{|h(e^*)|-1}$ F-archi di salita attivi, ciascuno dei quali con una probabilità di utilizzo positiva. Ciò differisce da quanto proposto in [13] in quanto, essendoci un unico possibile F-arco di salita, il flusso si ripartisce solo in funzione delle frequenze associate a ciascuna linea, indipendentemente dal tempo con cui ciascuna linea porta alla destinazione.

Globalmente, per una data destinazione d, all'arco di salita (i,j), sulla linea h-esima sarà assegnata una quantità di flusso pari a:

$$x(i,j) = \sum_{h(e') \subseteq h(e^*)} x(e') \, \frac{\varphi_h}{\Phi(e')} \, \delta_{ij}(e'),$$

dove

$$\delta_{ij}(e') = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in h(e'), \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

essendo $x(e')$ il flusso assegnato all'F-arco e' per la destinazione d.

Nell'insieme attrattivo esisteranno linee più o meno efficienti. Una linea j, con un valore $V(j)$ minore di quello di altre linee attrattive che servono la stessa fermata i, darà origine ad F-archi di salita attivi complessivamente "migliori" a cui il modello probabilistico definito in (3.9) assegnerà, a parità di frequenza, una maggiore quantità di flusso. In concreto, analizzando il flusso totale assegnato a ciascuna linea attrattiva si dovrebbe osservare una tendenza del flusso ad indirizzarsi verso le linee attrattive migliori.

Nel paragrafo 5 presenteremo una serie di prove tese a mostrare come questa "tendenza" non sia tale da stravolgere l'approccio "per ipercammini" indispensabile per valutazioni di sistemi di trasporto collettivo.

4.2 Sottoinsiemi attrattivi annidati

Su un F-grafo attivo derivante dalla (3.5) e dalla (3.8) il modello proposto nel paragrafo precedente assegna una probabilità non nulla anche alla strategia di viaggio che consiste nello scartare tutte le "migliori" linee attrattive per servirsi esclusivamente della peggiore.

Volendo superare questa sorta di *anomalia*, supponiamo che l'incapacità di un viaggiatore di adottare a ciascuna fermata una strategia totalmente razionale, rappresentata dall'F-arco di salita ottimo e^*, si manifesti al più nello scartare le peggiori linee tra quelle appartenenti all'insieme attrattivo ottimo.

Studiamo quindi l'ipotesi che i viaggiatori possano decidere di non servirsi di una o più delle linee peggiori tra quelle attrattive. Consideriamo un nodo fermata i per il quale l'F-arco ottimo $e^* = (i,h(e^*))$ verifica la (3.8), cioè $e^* \in E_A$. Allora $e' = (i,h(e'))$, con $\emptyset \neq h(e') \subseteq h(e^*)$, è *attivo* se:

$$V(u) \leq V(j), \qquad \forall\, j \in h(e^*) \backslash h(e'), \quad \forall\, u \in h(e'). \tag{4.3}$$

Indichiamo una tale definizione di F-archi attivi col nome di "sottoinsiemi attrattivi annidati" perché se l'F-arco ottimo $e^* = (i,\{j_1, j_2, ..., j_k\})$, con $V(j_1) < V(j_2) < ... < V(j_k)$, rispetta la (3.8) allora considereremo attivi, con probabilità di utilizzo non nulla, gli F-archi di salita $e_1 = (i,\{j_1\})$, $e_2 = (i,\{j_1, j_2\})$, ..., $e_k = e^* = (i,\{j_1, j_2, ..., j_k\})$.

Nel caso in cui vi siano due nodi j_r e $j_{r+1} \in h(e^*)$ tali che $V(j_r) = V(j_{r+1})$ si adotta la convenzione di produrre i sottoinsiemi annidati secondo l'ordine dei nodi di $h(e^*)$.

Da un punto di vista algoritmico si dovranno enumerare solo $|h(e^*)|$ F-archi di salita per ogni F-arco e^* ottimo e attivo; il numero di confronti complessivo della procedura *Active_F-graph*() è quindi

$$\sum_{i \in NF_A} |h(e_i^*)|.$$

La procedura che determina l'F-grafo attivo in accordo a (3.5), (3.8) e (4.3) è la seguente:

```
Procedure Active_F-graph(H, h*, V, H_A)
  { (inizializzazione)
    E_A := Ø;
    (scansione dell'F-grafo di supporto)
    for each e = (i,j) ∈ E do
        if V(i) > V(j) then E_A := E_A ∪ {e};
    for each e* = (i,{j_1, j_2,..., j_k}) ∈ E such that V(j_1) ≤ V(j_2) ≤... ≤ V(j_k) do
        if V(i) > V(j_k) then
            for each h := 1 to k do E_A := E_A ∪ {e' = (i,{j_1, j_2, ..., j_h})};
  }
```

Per i passi successivi restano valide (4.1) e (4.2) e le conseguenti procedure *Local_Splitting*() e *Flow_Distribution*().

L'assegnazione secondo il criterio dei sottoinsiemi attrattivi annidati penalizza meno i percorsi a piedi, rispetto al caso di tutti gli F-archi attivi, per il minor numero di F-archi di salita non ottimi considerati attivi. La ripartizione del flusso tra le diverse linee sarà invece maggiormente influenzata dalla "bontà" di ciascuna linea. Infatti, il nodo j_1, con cui abbiamo indicato la linea migliore rispetto al nodo fermata i e alla destinazione considerata, comparirà in $|h(e^*)|$ F-archi di salita considerati attivi, il nodo j_2 comparirà in $|h(e^*)|$-1 F-archi; il nodo j_k appartiene solo a $h(e^*)$ e quindi parteciperà una sola volta alla ripartizione del flusso. Comunque, la penalizzazione di j_k è mitigata dal fatto che a e^*, in quanto rappresentativo della migliore alternativa tra quelle che prevedono l'uso dell'autobus, sarà assegnata dalla regola logit la maggiore quantità di flusso.

Formalmente, alla h-esima linea, rappresentata dal nodo j_h nel grafo di supporto e dall'arco di salita (i,j_h) in corrispondenza del nodo i, avente frequenza φ_h e costo dalla destinazione $V(j_h)$ viene assegnata per la destinazione d una quantità di flusso pari a:

$$x(i,j_h) = \sum_{v=h}^{k} x(e_v) \frac{\varphi_h}{\Phi(e_v)}, \qquad k = |h(e^*)|;$$

dove $e_v = (i,\{j_1, j_2,..., j_v\})$ con $V(j_1) \le V(j_2) \le ... \le V(j_v)$.

5 Alcuni esempi

Scopo di questo paragrafo è quello di valutare l'effetto delle diverse definizioni di F-grafo attivo presentate sulle assegnazioni prodotte dai rispettivi modelli logit per F-cammini. Nel seguito indicheremo come *ipotesi (a)* l'F-grafo attivo derivante dalle (3.5) e (3.8) così come proposto in [13], come *ipotesi (b)* l'approccio "tutti i sottoinsiemi attrattivi" descritto in 4.1, come *ipotesi (c)* l'approccio per "sottoinsiemi attrattivi annidati" descritto in 4.2.

L'obiettivo è di valutare la quantità di flusso assegnata a ciascuna linea dal momento che nelle ipotesi *(b)* e *(c)* la stessa linea riceverà porzioni di flusso da diversi F-archi attivi.

A tale scopo, consideriamo due esempi di F-grafo di supporto in figura 5.1.

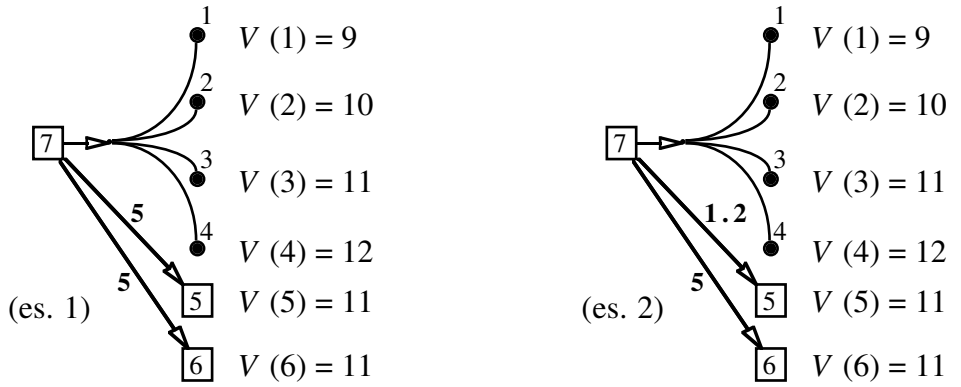


fig. 5.1 Due esempi con un F-arco di salita ottimo $e^* = (7,\{1,2,3,4\})$ e due archi a piedi (7,5) e (7,6); in (es. 1) l'alternativa ottima è individuata da e^* mentre in (es. 2) è individuata da (7,5).

Supponiamo, per semplicità di trattazione, che da ciascuno dei nodi 1,…, 6 si generi un'unica alternativa di percorso (ciò in generale è falso perché a valle dei nodi considerati sono possibili ulteriori *diversioni*); in questo caso sarà $W(j) = \exp(\theta \cdot V(j))$, $j \in \{1,\ldots, 6\}$. Si noti che nei due esempi e^*, (7,5) e (7,6) sono attivi.

Caso 1: tutte le linee con uguale frequenza

ipotesi (a)

	(es. 1)	(es. 2)
①②③④	75.39%	44.35%
5	12.31%	48.41%
6	12.31%	7.24%

ipotesi (b)

	(es. 1)	(es. 2)
①	1.80%	1.59%
②	1.09%	0.97%
③	0.66%	0.59%
④	0.40%	0.36%
①②	9.15%	8.08%
①③	7.12%	6.30%
①④	5.55%	4.90%
②③	5.55%	4.90%
②④	4.32%	3.82%
③④	3.37%	2.97%
①②③	13.31%	11.76%
①②④	11.27%	9.96%
①③④	9.54%	8.43%
②③④	8.07%	7.13%
①②③④	14.17%	12.52%
5	2.31%	13.67%
6	2.31%	2.04%

ipotesi (c)

	(es. 1)	(es. 2)
①	4.18%	3.20%
①②	21.25%	16.28%
①②③	30.92%	23.68%
①②③④	32.91%	25.21%
5	5.37%	27.51%
6	5.37%	4.12%

tabella 5.1 Percentuali di flusso assegnate a ciascuna alternativa con $\theta = -0{,}5$.

Consideriamo il caso in cui le quattro linee di trasporto incidenti nel nodo fermata 7 abbiano tutte la stessa frequenza di 4 bus/ora. In questo caso $\Phi(e^*) = 16$; ponendo $\eta = 1/2$ si ha:

$$V(e^*) = w(e^*) + \sum_{j=1}^{4} V(j)\varphi_j \,/\, \Phi(e^*) = 1{,}875 + 10{,}5 = 12{,}375$$

Per richiamare le differenze tra le tre definizioni di F-grafo attivo, confrontiamo le assegnazioni sugli esempi (es. 1) e (es. 2) in termini di alternative di percorso fissando $\theta = -0{,}5$.

Dalla tabella 5.1 si può osservare che in (es. 1) l'alternativa migliore è rappresentata da $e^* = (7,\{1,2,3,4\})$ che infatti assorbe una percentuale di flusso maggiore delle altre (in particolare, nelle ipotesi *(b)* e *(c)*, maggiore di qualunque altro F-arco di salita non ottimo).

In (es. 2) l'alternativa migliore è rappresentata dall'arco a piedi (7,5), che assorbe la maggior parte del flusso: nell'ipotesi *(a)* le conseguenze del minor costo sono significative; nell'ipotesi *(b)* a causa della presenza di ben 15 F-archi di salita attivi, la percentuale di flusso su (7,5) scende sensibilmente, nell'ipotesi *(c)* questo fenomeno viene in parte mitigato.

Analizziamo nella tabella 5.2 le percentuali di flusso uscente dal nodo 7 assegnate ai singoli archi, siano essi rappresentativi di fermate o di linee di trasporto, per tre distinti valori del parametro θ.

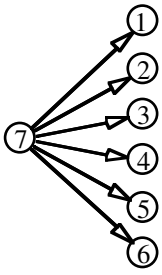
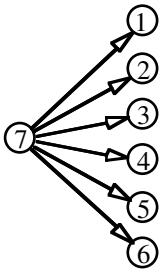
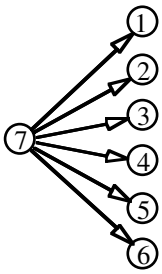
ipotesi	(es. 1)			(es. 2)		
	$\theta = -0.1$	$\theta = -0.5$	$\theta = -0.9$	$\theta = -0.1$	$\theta = -0.5$	$\theta = -0.9$
(a) 	10.45%	18.85%	23.22%	9.21%	11.09%	11.32%
	10.45%	18.85%	23.22%	9.21%	11.09%	11.32%
	10.45%	18.85%	23.22%	9.21%	11.09%	11.32%
	10.45%	18.85%	23.22%	9.21%	11.09%	11.32%
	29.10%	12.31%	3.56%	37.50%	48.41%	52.99%
	29.10%	12.31%	3.56%	25.65%	7.24%	1.73%
(b) 	23.65%	27.63%	29.40%	23.09%	24.42%	23.82%
	22.79%	25.03%	26.45%	22.26%	22.12%	21.43%
	21.98%	22.53%	23.00%	21.47%	19.91%	18.63%
	21.21%	20.19%	19.57%	20.71%	17.84%	15.85%
	5.18%	2.31%	0.79%	7.40%	13.67%	19.62%
	5.18%	2.31%	0.79%	5.06%	2.04%	0.64%
(c) 	34.28%	33.34%	32.65%	32.19%	22.54%	22.33%
	20.92%	29.16%	31.65%	19.65%	22.33%	21.65%
	11.68%	18.53%	22.37%	10.97%	14.20%	15.30%
	5.04%	8.23%	10.21%	4.74%	6.30%	6.98%
	14.04%	5.37%	1.56%	19.28%	27.51%	32.68%
	14.04%	5.37%	1.56%	13.18%	4.12%	1.07%

tabella 5.2 Le percentuali di flusso attribuite a ciascun arco per il caso 1.

Avendo le diverse linee uguale frequenza risulta evidente la differenza qualitativa tra le tre definizioni di F-grafo attivo: infatti, nell'ipotesi *(a)* le quattro linee attrattive sono destinate a ricevere esattamente la stessa quantità di flusso, indipendentemente dalla velocità con cui raggiungono la destinazione.

Nell'ipotesi *(b)* l'effetto dei diversi tempi di viaggio delle quattro linee incide sulle percentuali di utilizzo, soprattutto al decrescere del valore di θ; si noti che la linea "peggiore", la *linea 4*, riceve comunque percentuali significative di flusso, sia in (es. 1) che in (es. 2). Per contro, le percentuali di

flusso assegnate agli archi a piedi diminuiscono rispetto all'ipotesi *(a)*, eccetto che per (7,5) in (es. 2) in quanto esso appartiene al tragitto più breve.

Nell'ipotesi *(c)* la percentuale di flusso assegnata agli archi a piedi ha un valore intermedio tra quelli ottenuti per le ipotesi *(a)* e *(b)*. Risulta particolarmente alto il divario fra la quantità di flusso assegnata alla linea migliore, la *linea 1*, e quella assegnata alla linea peggiore, la *linea 4*, sebbene appartengano entrambe all'insieme attrattivo ottimo $h(e^*)$. Si può osservare però che, al decrescere di θ, il divario tra le quantità di flusso sulle diverse linee tende a diminuire: questo perché al decrescere di θ il modello logit assegnerà agli F-archi attivi non ottimi probabilità decrescenti.

Caso 2: linee con frequenze diverse (linee migliori con frequenze minori)

Consideriamo un caso in cui le quattro linee di trasporto incidenti nel nodo fermata 7 abbiano le seguenti frequenze: $\varphi_1 = 2$, $\varphi_2 = 3$, $\varphi_3 = 4$ e $\varphi_4 = 5$. In pratica, facciamo in modo che a minor tempo di viaggio corrisponda un minore numero di passaggi orari alla fermata. Per il caso 2 si ha $\Phi(e^*) = 14$; ponendo $\eta = 1/2$ si ha:

$$V(e^*) = w(e^*) + \sum_{j=1}^{4} V(j)\varphi_j \,/\, \Phi(e^*) = 2{,}142 + 10{,}857 = 13 \ .$$

Si noti che $V(e^*)$ è aumentato rispetto al caso 1. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 5.3.

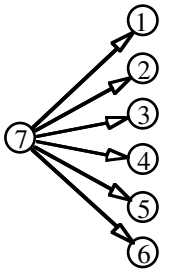
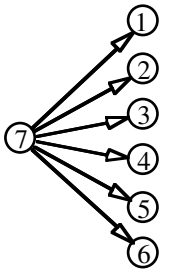
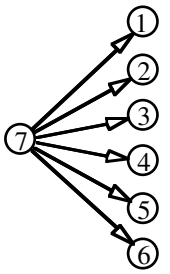
ipotesi	(es. 1)			(es. 2)		
	θ = -0.1	θ = -0.5	θ = -0.9	θ = -0.1	θ = -0.5	θ = -0.9
(a) 	5.76%	9.88%	12.59%	5.06%	5.26%	4.58%
	8.63%	14.82%	18.89%	7.59%	7.89%	6.86%
	11.51%	19.76%	25.19%	10.12%	10.52%	9.15%
	14.34%	24.69%	31.48%	12.65%	13.15%	11.44%
	29.85%	15.43%	5.92%	38.36%	54.95%	65.81%
	29.85%	15.43%	5.92%	26.23%	8.22%	2.15%
(b) 	14.06%	13.42%	13.85%	13.70%	11.22%	9.36%
	20.41%	20.84%	21.77%	19.89%	17.42%	14.71%
	25.30%	27.41%	28.72%	24.65%	22.92%	19.41%
	28.87%	31.43%	32.42%	28.13%	26.28%	21.91%
	5.68%	3.45%	1.62%	8.09%	19.28%	33.52%
	5.68%	3.45%	1.62%	5.53%	2.88%	1.10%
(c) 	21.94%	17.11%	17.21%	20.40%	11.32%	8.27%
	21.90%	25.41%	25.81%	20.36%	16.81%	12.40%
	15.58%	25.09%	30.22%	14.49%	16.60%	14.52%
	7.88%	14.40%	19.44%	7.33%	9.53%	9.34%
	16.35%	9.00%	3.66%	22.23%	39.79%	53.72%
	16.35%	9.00%	3.66%	15.20%	5.95%	1.76%

tabella 5.3 Le percentuali di flusso attribuite a ciascun arco per il caso 2.

Essendo aumentato $V(e^*)$ rispetto al caso 1, la probabilità dei due archi a piedi cresce per tutti gli esempi, valori di θ e ipotesi.

La minore frequenza della linea 1 comporta un abbattimento del suo utilizzo: in base alle sole frequenze, corrisponde ai 2/14 del flusso assegnato all'F-arco ottimo.

Nell'ipotesi *(b)* la percentuale di flusso è maggiore di quella dell'ipotesi *(a)* e rimane sostanzialmente invariata in (es. 1) al decrescere di θ, soprattutto per la forte diminuzione della percentuale degli archi a piedi. La situazione cambia piuttosto evidentemente nell'ipotesi *(c)*; la linea 1, sebbene registri comunque una flessione rispetto al precedente assetto di frequenze, continua ad essere la linea più utilizzata a conferma del fatto che utilizzando gli insiemi attrattivi annidati il minor tempo di percorrenza di una linea assume una importanza maggiore della frequenza di passaggio alla fermata.

Sempre considerando l'(es. 1), è interessante notare l'andamento della percentuale di flusso assegnata alla *linea 1* al variare di θ nelle ipotesi *(b)* e *(c)*; questo è il risultato di due effetti contrastanti: e^* individua l'F-arco di costo minimo e quindi al diminuire di θ ad esso sarà assegnata una percentuale più alta; gli altri F-archi attivi contenenti la *linea 1*, essendo non ottimi subiscono, al decrescere di θ una diminuzione della percentuale.

Le considerazioni sulla ripartizione interna all'insieme delle linee restano valide anche in (es. 2) dove si registrano significative parti di flusso sull'arco (7,5), soprattutto al decrescere di θ.

Caso 3: linee con frequenze diverse (linee migliori con frequenze maggiori)

Consideriamo un caso in cui le quattro linee di trasporto incidenti nel nodo fermata 7 abbiano le frequenze in ordine inverso rispetto al caso precedente: $\varphi_1 = 5$, $\varphi_2 = 4$, $\varphi_3 = 3$ e $\varphi_4 = 2$. In pratica, facciamo in modo che al minor tempo di viaggio corrisponda anche un maggior numero di passaggi alla fermata. Per il caso 2 si ha $\Phi(e^*) = 14$; ponendo $\eta = 1/2$ si ha:

$$V(e^*) = w(e^*) + \sum_{j=1}^{4} V(j)\varphi_j \,/\, \Phi(e^*) = 2{,}142 + 10{,}143 = 12{,}286 \ .$$

Si noti che $V(e^*)$ è diminuito rispetto al caso 1 e al caso 2.

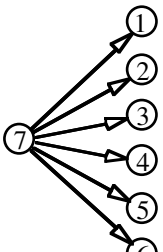
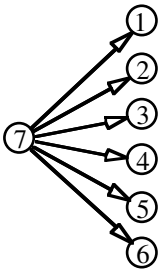
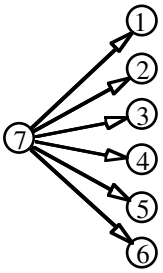
ipotesi	(es. 1)			(es. 2)		
	θ = -0.1	θ = -0.5	θ = -0.9	θ = -0.1	θ = -0.5	θ = -0.9
(a) 	15.01%	27.22%	33.36%	13.24%	16.23%	16.88%
	12.01%	21.77%	26.69%	10.59%	12.99%	13.51%
	9.01%	16.33%	20.01%	7.94%	9.74%	10.13%
	6.00%	10.89%	13.34%	5.29%	6.49%	6.75%
	28.99%	11.90%	3.30%	37.38%	47.45%	51.06%
	28.99%	11.90%	3.30%	25.56%	7.10%	1.67%
(b) 	31.93%	40.91%	43.44%	31.16%	36.17%	35.70%
	25.51%	26.65%	27.93%	24.89%	23.56%	22.95%
	19.14%	17.28%	17.22%	18.68%	15.28%	14.15%
	12.68%	10.57%	9.95%	12.38%	9.35%	8.18%
	5.37%	2.30%	0.73%	7.66%	13.60%	18.41%
	5.37%	2.30%	0.73%	5.24%	2.03%	0.60%
(c) 	40.54%	43.74%	43.51%	38.15%	34.53%	31.56%
	20.45%	28.81%	32.29%	19.24%	22.74%	23.42%
	9.10%	13.77%	16.45%	8.56%	10.87%	11.93%
	2.81%	4.29%	5.18%	2.64%	3.39%	3.76%
	13.55%	4.69%	1.28%	18.65%	24.76%	28.41%
	13.55%	4.69%	1.28%	12.75%	3.70%	0.93%

tabella 5.4 Le percentuali di flusso attribuite a ciascun arco per il caso 3.

La diminuzione di $V(e^*)$ giustifica la diminuita probabilità dei due archi a piedi nei vari esempi, ipotesi e valori di θ. L'alta frequenza della *linea 1* porta ad un aumento sensibile della percentuale rispetto ai due casi precedenti.

Nell'ipotesi *(b)*, al decrescere di θ si registra uno spostamento di flusso verso gli archi di salita in (es. 1) e, tra essi, dalle due linee più lente e meno frequenti (3 e 4) verso le due linee migliori (1 e 2); in (es. 2) lo spostamento si registra verso la sola *linea 1* dalle linee *2*, *3* e *4*.

Nell'ipotesi *(c)* la predominanza della linea migliore appare ancora più evidente poiché, rispetto alle due prime ipotesi, appartiene a tutti e quattro gli F-archi di salita considerati attivi e in ciascuno di essi, per effetto della maggiore frequenza, la *linea 1* assorbe la maggiore quantità di flusso.

Si noti che, al decrescere di θ, in (es. 1) si ha un aumento di percentuale per ciascuna delle quattro linee; invece in (es. 2) le percentuali delle linee *2*, *3* e *4* aumentano al decrescere di θ, mentre la percentuale della *linea 1* decresce sensibilmente. Ciò si giustifica col fatto che le probabilità di utilizzo dei tre F-archi di salita non ottimi diminuiscono drasticamente, in modo più sensibile rispetto all'aumento della probabilità dell'F-arco ottimo e^*.

Commenti finali

La sperimentazione presentata non è sufficiente per ottenere delle indicazioni precise sugli effetti delle varie ipotesi di F-grafo attivo nel modello di assegnazione stocastica. Infatti, la scelta tra le ipotesi dovrebbe essere basata sulla capacità nel rappresentare il comportamento aleatorio degli utenti.

Nella realtà vi è una forte corrispondenza tra le caratteristiche geografiche del territorio, le condizioni ambientali, la struttura della rete di trasporto collettivo, la sua conoscenza e affidabilità e il conseguente comportamento degli utenti.

È intuitivamente spiegabile che un servizio collettivo all'interno di un'area urbana abbastanza ristretta e in territorio pianeggiante ha come valide alternative anche i percorsi a piedi per una parte non trascurabile del tragitto degli utenti, cosa del tutto diversa si ha quando l'estensione della città è notevole oppure quando la struttura orografica del territorio rende disagevole i percorsi a piedi. Analoghe considerazioni possono essere fatte per le condizioni climatiche.

Una buona conoscenza da parte degli utenti del servizio collettivo e della sua affidabilità porta in generale ad avere comportamenti "vicini" al comportamento razionale della scelta dell'F-cammino ottimo. Questo ha come modello di scelta degli F-archi attivi essenzialmente il modello proposto in [13].

L'ipotesi di "tutti i sottoinsiemi attrattivi" dovrebbe poter rappresentare le scelte di utenti che prediligono il trasporto collettivo rispetto a spostamenti a piedi anche se la loro scelta tra le alternative di uso del trasporto collettivo sono debolmente influenzate dai tempi di viaggio e dei tempi di attesa.

La terza ipotesi, quella dei "sottoinsiemi attrattivi annidati", sembra appropriata per rappresentare un comportamento influenzato dai tempi di viaggio maggiormente che dai tempi di attesa, da cui la possibile esclusione delle linee attrattive più lente.

In queste analisi di possibile collegamento tra le ipotesi degli F-archi attivi e il comportamento degli utenti non abbiamo tenuto conto dell'effetto differenziato del parametro di calibrazione θ sulle varie ipotesi mostrato dalla sperimentazione effettuata, pur se limitata al caso semplice di una singola fermata.

Pertanto, non possiamo fornire indicazioni chiare e definitive al modellista su quale definizione di F-grafo attivo adottare nella modellizzazione di un particolare servizio collettivo urbano; preferiamo invitarlo a verificare "sul campo" quale delle tre definizioni tende a rappresentare meglio la realtà in esame.

Bibliografia

[1] Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. (1993); *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[2] Ben Akiva M., Lerman S. (1987); *Discrete choice analysis*, MIT Press, Cambridge.

[3] Berge C. (1973); *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam.

[4] Berge C. (1989); *Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets*, North-Holland, Amsterdam.

[5] Cascetta E. (1990); *Metodi quantitativi per la pianificazione dei sistemi di trasporto*, Cedam, Padova.

[6] Dial R. B. (1971); A probabilistic multipath assignment model which obviates path enumeration, *Transportation Research*, **5**, 83-111.

[7] Gallo G., Longo G., Nguyen S., Pallottino S. (1989); Gli ipergrafi orientati: un nuovo approccio per la formulazione e risoluzione di problemi combinatori, in *Atti delle Giornate AIRO'89*, 217-236.

[8] Gallo G., Longo G., Nguyen S., Pallottino S. (1993); Directed hypergraphs and applications, *Discrete Applied Mathematics*, **42**, 177-201.

[9] Nguyen S., Pallottino S. (1986); Assegnamento dei passeggeri ad un sistema di linee urbane: determinazione degli ipercammini minimi, *Ricerca Operativa*, **38**, 28-47.

[10] Nguyen S., Pallottino S. (1988); Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks, *European Journal of Operational Research*, **37**, 176-186.

[11] Nguyen S., Pallottino S. (1989); Hyperpaths and shortest hyperpaths, in (B. Simeone, ed.) *Combinatorial Optimization*, *Lecture Notes in Mathematics* **1403**, Springer-Verlag, Berlin, 258-271.

[12] Nguyen S., Pallottino S. (1991); Ipercammini attivi in reti di trasporto, *Ricerca Operativa*, **57**, 91-115.

[13] Nguyen S., Pallottino S., Gendreau M. (1997); Implicit enumeration of hyperpaths in logit models for transit networks, in corso di stampa su *Transportation Science*.

[14] Sheffi Y. (1985); *Urban transportation networks*, Prentice-Hall Englewood Cliffs.